

الفضاء المتجهي 2sm elouadih

تمرين 1:

في الفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 نعتبر المتجهات $\vec{u} = (1, -1, 1); \vec{v} = (0, -1, 2); \vec{w} = (1, -2, 3)$

1. بين أن $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ مقيدة
 2. نعتبر الفضاء F المتجهي المولد ب \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} . اعط أساسا ل F محددًا بعده
 3. نعتبر المجموعة التالية $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0\}$
- أ. بين أن $(G, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب. حدد بعده

ت. بين أن $G = F$

تمرين 2:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} / (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي محددًا بعده
2. بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة
3. هل هي كاملة؟ هل هي تبادلية؟

تمرين 3:

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي محددًا بعده
2. نضع $A = M(1, 0)$ و $B = M(0, 1)$. أحسب $A^2; B^2; AB; BA$
3. بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة. هل هي كاملة؟
4. ماهي بنية (E_1, \times) حيث E_1 مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا

تمرين 4:

نزود $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ بالقانون + التالي: $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$ والقانون الخارجي . المعرف

$$\text{ب } \lambda \cdot (a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين 5:

$$E = \{ aI + bA + cB / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$\text{حيث } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي محددًا بعده
2. حدد إحداثيات كل من A^2 و B^2 و AB و BA في الأساس (I, A, B)
3. استنتج B^3

4. بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحديه و تبادلية

تمرين 6:

نعتبر المجموعة التالية $E = \{aI + bA / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\text{حيث } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي محددًا بعده

2. أ. بين أن $A^2 = A + 2I$

ب. استنتج أن A تقبل مقلوبا وحدده

3. بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحديه و تبادلية

4. هل هي جسم؟

5. هل هي كاملة؟

6. بين أن $A^n = u_n A + v_n I$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

7. نضع
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} \\ \beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} \end{cases}$$

أ. حدد طبيعة $(\alpha_n)_n$ و $(\beta_n)_n$

ب. حدد A^n بدلالة n

تمرين 7:

$$E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

نعتبر المجموعة التالية

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي محددًا بعده

3. بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحديه .

-تمرين 8:

حدد مقلوب المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (\text{ontrouvera } B^{-1} = B)$$